

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Μονάδες 10

2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει: $|z|^n = |z^n|$.

Μονάδες 2

2. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 2

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Μονάδες 2

5. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ , ισχύει:

$$\int f'(x)dx = -f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=i$, $z_2=1$ και $z_3=1+i$.

- α. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$.

Μονάδες 5

- β. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

Μονάδες 10

- ii. για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}.$$

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$, $x \in (0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \quad \text{και} \quad f(e^5) > 0.$$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ και $f(0) = 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I(x) = \int_0^x f(t)dt$

Μονάδες 9

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x^2}$.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ